Sesión preparatoria OME

2 de febrero de 2024

1. **(2024)** En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien amigas o bien enemigas (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigas y B y C son enemigas, entonces A y C son amigas. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:
   - X tiene el mismo número de enemigos que Y.
   - X e Y son amigos.
2. **(2002)** La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.
3. [Manhattan Mathematical Olympiad, 2005] Dados 100 números (naturales), probar que podemos escoger 15 de ellos de manera que la diferencia entre dos cualesquiera es múltiplo de 7.
4. Un cuadrado grande es cortado por 9 líneas horizontales y 9 verticales, formando 100 regiones rectangulares. Si exactamente 9 de ellas son cuadradas, probar que dos de esas regiones cuadradas tienen el mismo tamaño.
5. [Olimpiada Regional de México, 2015] Separamos los números $1, 2, \ldots, 100$ en dos conjuntos $A = \{a_1, ..., a_{50}\}$ y $B = \{b_1, ..., b_{50}\}$ tales que $a_1 > a_2 > ... > a_{50}$ y $b_1 < b_2 < ... < b_{50}$. Probar que, cualesquiera que sean los conjuntos A y B, siempre se cumple la siguiente igualdad:
$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{50} - b_{50}| = 2500$$
6. Los números $1, 2, ..., 2007$ se escriben (no necesariamente en este orden) formando un círculo. Consideremos todos los grupos de tres números adyacentes. Si 600 de esos grupos tienen tres números impares, y 500 de esos grupos tienen dos números impares y uno par, ¿Cuántos grupos tendrán tres números pares?
7. **(2009)** Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.
8. **(2004)** ¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?
9. **(2002)** Considera 7 puntos arbitrarios del plano, distintos entre sí, y los 21 segmentos que los conectan. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.
10. **(2023)** Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a|b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cual esta situación es posible.