1ª Sesión Taller Olimpiadas 2023-2024 Introducción

Antonio Medinilla y David Ramos

3 de noviembre de 2023

Teoría de Números:

Problema 1.- Encuentra todos los naturales n que cumplan $(n!)! = n!(2n-1)!$.

Problema 2.- Determinar todos los números naturales n tales que $n! > 2^n$.

Problema 3.- Demuestra que un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 9; y que es divisible por 11 si y sólo si la suma alternada de sus cifras es divisible por 11.

Problema 4.- Demuestra que $\sqrt{2}$ y $\log_3(2)$ son números irracionales.

Ecuaciones Funcionales:

Problema 5.- Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican

$$f(x) + 2f(-x) = (1+x)^2,$$

para todo x real.

Problema 6.- Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y.$$

Problema 7.- A cada entero positivo n, se le asigna un valor entero no negativo $f(n)$ que cumple

a. $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$.

b. $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n es 3.

c. $f(10) = 0$.

Hallar $f(2024)$ justificadamente.

Desigualdades:

Problema 8.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, donde x, $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

Problema 9.- Dados 4 números reales positivos a, b, c, d, tales que $abcd = 1$, demostrar que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

Problema 10.- Demuestra que para todo entero positivo n se tiene

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1}$$

donde $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$ es el enésimo coeficiente binomial central. ¿Para qué valores de n se tiene la igualdad?

Problema 11.- Demostrar que para cualquier entero positivo n se tiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3$$

De todo un poco:

Problema 12.- Consideramos la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_1 = a_2 = 1$ y

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n \quad \forall n \geq 1$$

Calcular a_{2024}.

Problema 13.- Da el número de soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3xy - z^2 = 9 \end{cases}$$

Problema 14.- Demostrar que las soluciones de la ecuación $20 = x^3 + 2x^2 + 10x$ no son racionales.

Problema 15.- Sabemos que el polinomio $p(x) = x^n + nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ tiene todas sus raíces reales r_1, r_2,..., r_n. Encontrar dichas raíces si sabemos que $r_1^{16} + r_2^{16} + \cdots + r_n^{16} = n$.

Problema 16.- Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

Problema 17.- Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y).$$

Soluciones:

1.- Si dividimos ambos lados de la igualdad por $n!$ nos queda

$$(n!-1)! = (2n-1)!$$

ya que $(n!)! = (n!-1)! \cdot n!$. Ahora bien, no podemos eliminar tan alegremente los factoriales a ambos lados porque, por ejemplo, $0! = 1! = 1$ pero $0 \neq 1$. Sin embargo, este es el único caso donde no podemos hacerlo, así que estudiémoslo por separado:

Si $2n-1=0$ tenemos que $n = 1/2$ que no puede ser ya que n es natural. Si $2n-1 = 1$, $n = 1$ y $(n!-1)! = 0! = 1$, luego $n = 1$ es solución a la ecuación.

En el resto de casos ya sí podemos eliminar los factoriales y nos queda que $n!-1 = 2n-1$, que simplificando nos queda $(n-1)! = 2$ luego $n = 3$.

Por tanto las soluciones son $n = 1, 3$.

2.- Si vamos probando números tenemos

$$1! < 2^1 \qquad 2! < 2^2 \qquad 3! < 2^3 \qquad 4! > 2^4 \qquad 5! > 2^5 \qquad 6! > 2^6 \qquad \cdots$$

Probemos por inducción que a partir de 4 se tiene la desigualdad. Hemos visto que el caso base $n = 4$ se tiene. Supongamos que se tiene la desigualdad para $n \geq 4$, probemos que se tiene para $n+1$:

$$n! > 2^n \quad \overset{n+1>4>2}{\Longleftrightarrow} \quad n!\cdot(n+1) > 2^n \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (n+1)! > 2^{n+1}$$

3.- Módulo 9, 10 es congruente con 1, luego

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9$$

luego un número será congruente con 0 módulo 9 (es decir, será divisible por 9) si y sólo si la suma de sus cifras lo es.

De un modo similar, tenemos que 10 es congruente con -1 módulo 11, por tanto

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1}a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11}$$

luego un número será congruente con 0 módulo 11 (es decir, será divisible por 11) si y sólo si la suma alternada de sus cifras lo es.

4.- Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, que existen p, q enteros positivos (porque $\sqrt{2}$ es positivo) coprimos tales que $\sqrt{2} = p/q$, entonces

$$\sqrt{2}q = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2q^2 = p^2$$

lo que nos dice que p^2 es un número par, pero entonces p es par. Sea m tal que $p = 2m$, entonces

$$2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q^2 = 2m^2$$

de donde deducimos que q^2 es par, luego q es par, pero esto entra en contradicción con que p y q fueran coprimos !!! Entonces $\sqrt{2}$ no puede ser racional.

Supongamos ahora que $\log_3(2) = p/q$.

$$\log_3(2) = \frac{p}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3^{\log_3(2)} = 2 = 3^{\frac{p}{q}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^q = 3^p$$

pero al ser p y q enteros esta igualdad sólo se puede dar en el caso que $p = q = 0$, pero entonces tendríamos que $\log_3(2) = 0/0$!!! Entonces $\log_3(2)$ no puede ser racional.

5.- Sustituyendo $x = -x$ en la ecuación tenemos las igualdades

$$f(x) + 2f(-x) = (1+x)^2 \qquad\qquad f(-x) + 2f(x) = (1-x)^2$$

de donde podemos despejar $f(-x)$ e igualar

$$f(-x) = \frac{(1+x)^2 - f(x)}{2} \qquad\qquad f(-x) = (1-x)^2 - 2f(x)$$

$$\frac{(1+x)^2 - f(x)}{2} = (1-x)^2 - 2f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{2(1-x)^2 - (1+x)^2}{3}$$

6.- Sustituimos $x = f(0)$ e $y = -f(0)$, y obtenemos que $f(0) = 0$. Si ahora sustituimos $x = 0$ tenemos que $f(f(y)) = y$, de donde deducimos que f es biyectiva. Haciendo ahora $y = 0$ nos queda $f(x + f(x)) = f(2x)$ y por ser f inyectiva tenemos que $x + f(x) = 2x$, por lo que $f(x) = x$.

7.- Factorizando 2024 tenemos que $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, entonces $f(2024) = 3f(2) + f(11) + f(23)$. $f(23)$ es 0 por acabar 23 en 3. Como $f(10) = f(2) + f(5) = 0$ y f sólo da valores no negativos tenemos que $f(2) = f(5) = 0$. Por último, si consideramos $f(33) = f(3) + f(11)$, tenemos que $f(33) = f(3) = 0$ por acabar ambos en 3, luego $f(11) = 0$ y por tanto $f(2024) = 3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$.

8.- De la segunda igualdad sacamos que $x, y \in [-1, 1]$. Si $x = 1$, $y = 0$ y viceversa. Supongamos ahora que ninguno de los dos es 1. Entonces $x < 1$, de donde, por la primera igualdad, deducimos que $y > 0$ y del mismo modo $y < 1$ implica $x > 0$. Tenemos entonces que si $x \neq 1 \neq y$, $x, y \in (0, 1)$. Pero en ese intervalo $x^5 > x^6$ luego $1 = x^5 + y^5 > x^6 + y^6 = 1$!!! Por tanto las únicas soluciones son $(1, 0)$, $(0, 1)$.

9.- Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos que

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd}{10} \geq \sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2abacadbcbdcd} = \sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 1$$

10.- Lo probaremos por inducción. El caso base $n = 1$ se tiene $(2 \geq 2)$. Supongamos que n verifica la desigualdad.

$$\frac{(2n)!}{n!^2} \geq \frac{4^n}{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \geq \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{(2n+1)(n+2)}{2(n+1)^2}$$

Si conseguimos ver que la fracción de la derecha es menor que 1 habremos acabado.

$$\frac{(2n+1)(n+2)}{2(n+1)^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (2n+1)(n+2) \geq 2(n+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 0$$

Luego, como n es entero positivo se tiene lo queríamos. Para $n = 2$ la desigualdad es estricta, y por el mismo argumento anterior se mantiene así para $n \geq 2$ luego el único momento en el que se da la igualdad es cuando $n = 1$.

11.- Consideramos los números $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$, $x_{n+1} = 1/(n+1)$. Como no todos son iguales, la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica es estricta y por tanto tenemos que

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{n+1}}{n+1} > \sqrt[n+1]{\frac{1}{n^n(n+1)}} \Longleftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Veamos ahora que para todo n entero positivo se tiene que $(1 + 1/n)^n < 3$.
Tenemos por el binomio de Newton que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Podemos observar que $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!} < \frac{n^k}{k(k-1)}$, entonces $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{k(k-1)}$, luego

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} < 1 + 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

12.- La recurrencia se puede escribir como $a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n + 1$. Como $a_1 = a_2 = 1$, tenemos que $a_2a_1 = 1$ y es fácil ver por inducción que $a_{n+2}a_{n+1} = n + 1$. Entonces tenemos

$$a_{2024} = \frac{2023}{a_{2023}} = \frac{2023 \cdot a_{2022}}{2022} = \frac{2023 \cdot 2021}{2022 \cdot a_{2021}} = \cdots = \frac{2023 \cdot 2021 \cdot 2019 \cdots 3}{2022 \cdot 2020 \cdot 2018 \cdots 4 \cdot a_3} =$$
$$= \frac{2023 \cdot 2021 \cdot 2019 \cdots 3 \cdot a_2}{2022 \cdot 2020 \cdot 2018 \cdots 4 \cdot 2} = \frac{2023 \cdot 2021 \cdot 2019 \cdots 3}{2022 \cdot 2020 \cdot 2018 \cdots 4 \cdot 2} = \frac{2023!}{2^{2022} 1011!^2}$$

13.- La segunda ecuación se transforma en $z^2 = 3xy - 9$, que tiene solución para z si y sólo si $3xy - 9 \geq 0 \iff xy \geq 3$ de donde deducimos que x e y deben tener el mismo signo. Supondremos que son positivos, ya que el caso negativo es análogo. Tenemos entonces que para que el sistema tenga solución se debe dar $xy \geq 3$ y $x + y = 3$. Pero esto es imposible, ya que por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

$$\frac{3}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \sqrt{3} \quad !!!$$

14.- El problema es equivalente a probar que el polinomio $r(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ no tiene raices en $\mathbb{Q}$. Hagamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\frac{p}{q}$ es raíz de $r(x)$ siendo una fracción irreducible ($\text{mcd}(p,q) = 1$). Por el teorema de Ruffini, entonces se tiene que $p|20$ y que $q|1$, por lo que concluimos que la raíz es entera ya que $q = \pm 1$. Además sabemos que las posibles raices son los divisores del 20 (contando también con sus divisores negativos),por lo que los posibles valores de p son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$. Basta con comprobar que las 12 soluciones no son raices para el polinomio $r(x)$ sustituyendo cada uno de los valores y viendo que no se hacen 0. Pero podemos observar que si p es negativo, entonces $r(p) < 0$ y que si $p > 4$, entonces el valor se hace demasiado grande y bastaría con probar solo dos posibilidades (cuadno p vale 1 o 2) y ver que no funcionan pues $r(1) = -7$ y $r(2) = 16$.

15.- Por las ecuaciones de Cardano Vieta sabemos que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -n$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tenemos que

$$n^2 = (1 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 + \cdots + 1 \cdot r_n)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2) = n(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2)$$

de donde deducimos que $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 \geq n$. Del mismo modo, tomando los vectores $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(r_1^2, r_2^2, \ldots, r_n^2)$ tenemos que

$$n^2 \leq (1 \cdot r_1^2 + 1 \cdot r_2^2 + \cdots + 1 \cdot r_n^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_n^4) = n(r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_n^4)$$

de donde se deduce que $r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_n^4 \geq n$. Operando de este modo dos veces más llegamos a que $(r_1^{16} + r_2^{16} + \cdots + r_n^{16}) \geq n$. Pero sabemos que esta es una igualdad, que sólo se da si los vectores que hemos usado son proporcionales, es decir, si los r_i son iguales. De la igualdad $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -n$ obtenemos que $r_i = -1 \quad \forall i = 1, ..., n$.

16.- Sustituyendo $y \longrightarrow x$, tenemos que $f(0) = 0$. Ahora reemplazamos $x = -1, y = 0$ y nos queda que $f(1) = -f(-1)$. Si tomamos $y = 1$ en la ecuación original nos queda

$$f(x^2 - 1) = (x - 1)(f(x) + f(1)). \tag{1}$$

Si tomamos $y = -1$ en la ecuación original nos queda

$$f(x^2 - 1) = (x + 1)(f(x) + f(-1)). \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) y usando que $f(-1) = -f(1)$ obtenemos que $f(x) = xf(1)$. Es fácil ver que las funciones de la forma $f(x) = cx$ satisfacen la condición para todo $c \in \mathbb{R}$.

17.- Si sustituimos $x = 0, y = 0$ tenemos que $f(0) = f(0)^2$. Luego $f(0)$ vale 0 o 1.

- Si $f(0) = 0$, entonces sustituyendo $y = 0$, sacamos que $f(x) = 0$, pero la función idénticamente nula ($f(x) = 0 \quad \forall x$) no cumple las condiciones (basta con sustituir $x = y = 1$).
- Si $f(0) = 1$, reemplazamos $x = 1, y = -1$ llegamos a la igualdad $f(1)f(-1) = 0$, por lo que alguna de las dos es cero.

- Si $f(1) = 0$, basta con sustituir $y \longrightarrow 1, x \longrightarrow x+1$ y llegamos a que $f(x) = 1 - x$ y comprobamos que funciona.
- Si $f(-1) = 0$, basta con sustituir $y \longrightarrow -1, x \longrightarrow x+1$ y llegamos a que $f(x) = x+1$ y comprobamos que funciona.

Finalmente concluimos con que las soluciones son $f(x) = 1 - x$ y $f(x) = x + 1$.