PREPARACIÓN OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (CURSO 2023-24)

POLINOMIOS 03-11-2023

Resumen teórico: Fórmulas de Cardano-Vieta.
Teorema del resto.
Regla de Ruffini.

-) Definición. Polinomio mónico. Raíces de un polinomio.

-) Número de raíces de un polinomio. Fórmulas para el cálculo de las raíces. Raíces enteras.

-) División de un polinomio entre *(x-a)*. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Descomposición en producto de factores. Cálculo de raíces enteras y fraccionarias.

-) Caso $(x^n - a^n):(x-a)$. Consecuencias para el caso de polinomios con coeficientes enteros.

-) Fórmulas de Cardano-Vieta.

Cuestiones:

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican

P(1)=0, P(2)=0.

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican

P(1)=0, P(2)=0, P(3)=0, P(4)=0.

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican

P(1)=1, P(2)=1, P(3)=1, P(4)=1.

+) Escribe todos los polinomios de grado 3 que verifican

P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3.

1) Si *a, b, c* son las tres raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, calcula $a^2 + b^2 + c^2$

2) Denotamos *a, b* y *c* las tres raíces de la ecuación

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

La ecuación cuyas raíces son *a+b, a+c* y *b+c* es

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 9 = 0.$$

Determina *p, q* y *r*.

3) Halla todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

4) Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Halla B.

5) Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios P(x) que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \Re$. (Fase Local 2019)

6) Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \Re$ si y solamente si *a=b=c*. (Fase Local 2020)

7) Sea P un polinomio tal que $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2$. Determina $P(x^2-1)$. (Canguro 2003)

8) Se dice que un polinomio de coeficientes reales, *p(x)* , es almeriense si es de la forma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$$

y sus tres raíces son tres números reales positivos en progresión aritmética. Halla todos los polinomios almerienses tales que *p(7/4)=0*. (Fase Nacional 2020)

9) Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas. (Fase Nacional 2015)

10) Sean *a* y *b* enteros. Demuestra que la ecuación $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$ admite a lo sumo una solución entera. (Fase Nacional 2015)

11) Sea $P(x)=x^5+x^2+1$ y sean x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sus raíces. Sea $Q(x)=x^2-2$. Calcula el producto $Q(x_1)\, Q(x_2)\, Q(x_3)\, Q(x_4)\, Q(x_5)$.

12) Un polinomio mónico de cuarto grado verifica que *P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30.* Calcula *P(12)+P(-8).* (Olimpiada Internacional)

13) Encuentra todos los polinomios P(x) con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para todos los números reales *a, b, c* tales que *ab+ac+bc=0*. (Olimpiada Internacional 2004)

14) El polinomio *P(x)* tiene coeficientes enteros. Prueba que si *P(0)* y *P(1)* son impares, entonces *P(x)* no puede tener raíces enteras. (Am. Math. Monthly. Vol 17, nº2)