Taller básico de Geometría (9/2/24):

Fórmulas del área S de un triángulo, conocidos:

5. Coordenadas de los vértices (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2),

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Esta fórmula nos permite obtener un criterio rápido de cuándo tres puntos, conocidas sus coordenadas, están alineados: en ese caso, S=0.

Problema 2/4 OMA 2022. *Sea ABC un triángulo isósceles, con AB = AC. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo) $M_1M_2N_2N_1$ con: M_1 punto medio de BP, M_2 punto medio de PC, M_1N_1 y M_2N_2 perpendiculares a BC, tales que N, N_1 y N_2 están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.*

Solución 1 El triángulo NM_1M_2 es el homotético del ABC con la homotecia de centro P y razón ½, por tanto también es isósceles. Además $M_1M_2 = BC/2$, y si E es el pie de la perpendicular desde N a BC, entonces, E es punto medio de M_1M_2. Por tanto, el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es $NE \cdot M_1M_2 = (AD/2)(BC/2)$, con D el punto medio de BC, que es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que BC es el eje de abscisas y D el origen de coordenadas, se tiene: $A = (0, a)$, $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$, $P = (c, 0)$ Entonces $N = (c/2, a/2)$, $M_1 = ((c-b)/2 , 0)$, $M_2 = ((c + b)/2 , 0)$, $N_1 = ((c-b)/2 , x)$, $N_2 = ((c + b)/2 , y)$. La exigencia de que N, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que $0 = 4(a - x - y)$. Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si T y S son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente: $T = (x + y)/2 \cdot M_1M_2 = ab/2$, $S = ab$.

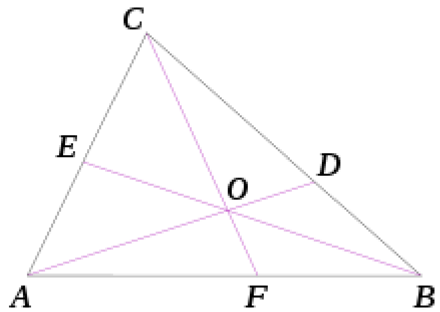
Problema 2/3 Campus La Rábida 2022. *Sea ABC un triángulo con BC = AC ≠ AB. Sea W el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene a A. La circunferencia de centro W que pasa por C vuelve a cortar a la recta AC en un punto P. Si I es el incentro de ABC, demuestra que los triángulos ABC y PIW son semejantes.*

Solución. Como W es el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene a A, tanto la bisectriz de ∠BAC como la mediatriz de BC pasan por W. Así, A, I y W están alineados y WC = WB. Además, el triángulo WIC es isósceles en W ya que si $\alpha = \beta$ y γ son los ángulos de ABC, entonces
$\angle WIC = 180^\circ - \angle CIA = \angle IAC + \angle ACI = \alpha/2 + \gamma/2$, y
$\angle ICW = \angle ICB + \angle BCW = \gamma/2 + \angle BAW = \gamma/2 + \alpha/2$.
Por tanto, la circunferencia centrada en W que pasa por C también pasa por B y por I. El simétrico de B con respecto a la recta AW es otro punto de la circunferencia, pues AW pasa por su centro. Además, como AW es una bisectriz y B está en la recta AB, su simétrico debe estar en la recta AC, así que es P o es C. C se descarta debido a que AB ≠ AC. Por simetría, el triángulo PIW es congruente a BIW, así que tenemos que ver que BIW y ABC son semejantes. Ambos son triángulos isósceles, por lo que por el criterio lado-ángulo-lado solo falta comprobar que dos ángulos son iguales, y lo son porque ∠IWB = ∠AWB = ∠ACB por arco capaz.

Teorema de Ceva. *Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si* $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

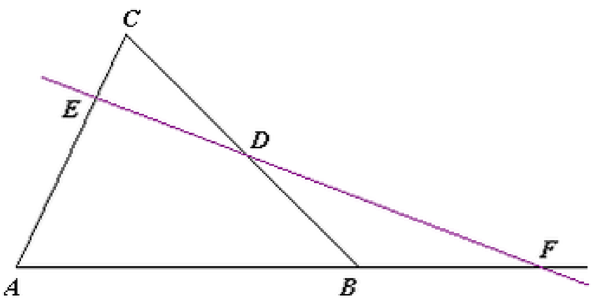
Esta relación es fácil de recordar si recorremos el perímetro del triángulo en un sentido. El primer segmento es el determinado por el vértice de partida al punto de división que se encuentra sobre el lado en el que nos estamos moviendo, el segundo segmento es el que va desde este último punto al segundo vértice, y así sucesivamente, hasta retornar al vértice de partida.

Demostración del teorema directo: Comprobar que el cociente *AF/FB* coincide con el cociente de las áreas de los triángulos *OAF y OBF*, así como con el cociente de las áreas de los triángulos *CAF* y *CBF*. De aquí se deduce que el cociente *AF/FB* coincide con el cociente de las áreas de los triángulos *OAC* y *OBC*. Lo análogo con las otras dos fracciones. El resto es muy simple.



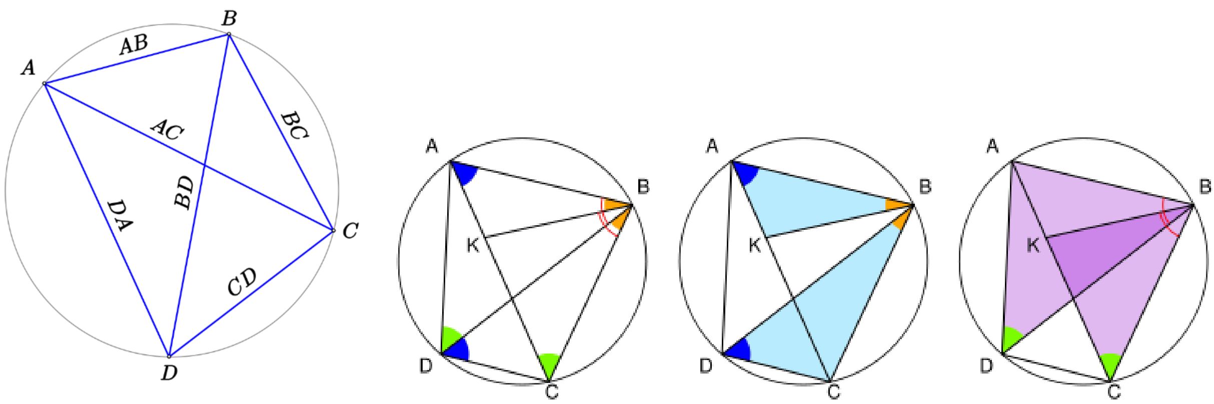
Teorema de Menelao. *Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales (o están alineados) si y sólo si* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1$

Téngase en cuenta que la relación anterior usa segmentos dirigidos.



Demostración del teorema directo: trazar perpendiculares desde *A*, *B* y *C* a la recta *DE*. Sean *P*, *P'* y *P''* los pies de las respectivas perpendiculares. Aplicar el teorema de Thales para expresar los cocientes del enunciado como cocientes de los segmentos dirigidos *AP, BP'* y *CP''*. El resto es muy simple.

Teorema de Ptolomeo. *Cuatro puntos A, B, C, D dados son cíclicos (están en una misma circunferencia) si y sólo si el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos: AC·BD=AB·CD+AD·BC*



Demostración.- Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Se verifica la igualdad de ángulos inscritos $\angle BAC = \angle BDC$, y $\angle ADB = \angle ACB$. Se construye el punto K de AC tal que se verifica la igualdad de ángulos $\angle ABK = \angle DBC$. Ahora, por ángulos comunes $\triangle ABK$ es semejante a $\triangle DBC$, y $\triangle ABD$ es semejante a $\triangle KBC$. Por lo tanto

$AK/AB = CD/BD$, y $CK/BC = DA/BD$, y de aquí, $AK\cdot BD = AB\cdot CD$, y $CK\cdot BD = BC\cdot DA$.

Lo que implica $AK\cdot BD + CK\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$, es decir, $(AK+CK)\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$. Pero $AK+CK = AC$, por lo tanto, $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$.

Aplicación: encontrar la razón áurea entre diagonales y lados de un pentágono regular.

En un cuadrilátero cualquiera, no necesariamente cíclico, se tiene la desigualdad $AC\cdot BD \leq AB\cdot CD+AD\cdot BC$

Problema 3 Fase Local 2023. *Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es local si*

$$a^2 + a = b^2$$
$$b^2 + b = c^2$$
$$c^2 + c = a^2$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$. Probar que $(a, b, -c)$ es local.

Solución. (a) Sumando las tres ecuaciones obtenemos que $a + b + c = 0$. La primera ecuación se puede reescribir entonces como

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = -a = b + c,$$

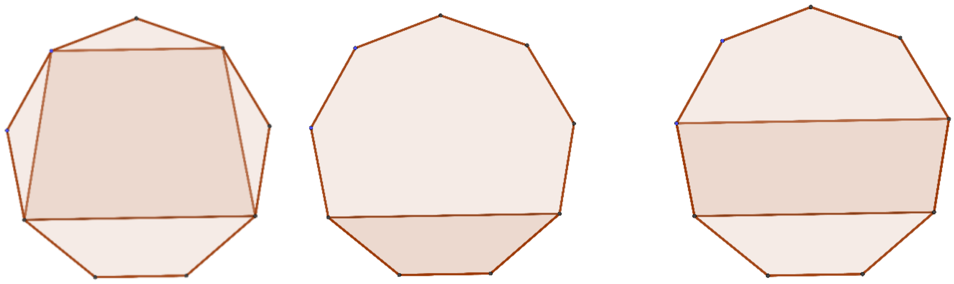
y de forma análoga

$$(b - c)(b + c) = c + a, \quad (c - a)(c + a) = a + b.$$

Notemos que $a + b$, $b + c$ y $c + a$ son diferentes de 0, ya que coinciden con $-c$, $-a$ y $-b$, respectivamente. Multiplicando las tres ecuaciones y dividiendo por $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$, llegamos a

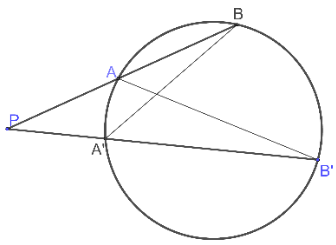
$$(a - b)(b - c)(c - a) = 1.$$

(b) Las igualdades $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$ y $c^2 + c = a^2$ se pueden obtener aplicando el teorema de Ptolomeo a los siguientes cuadriláteros.



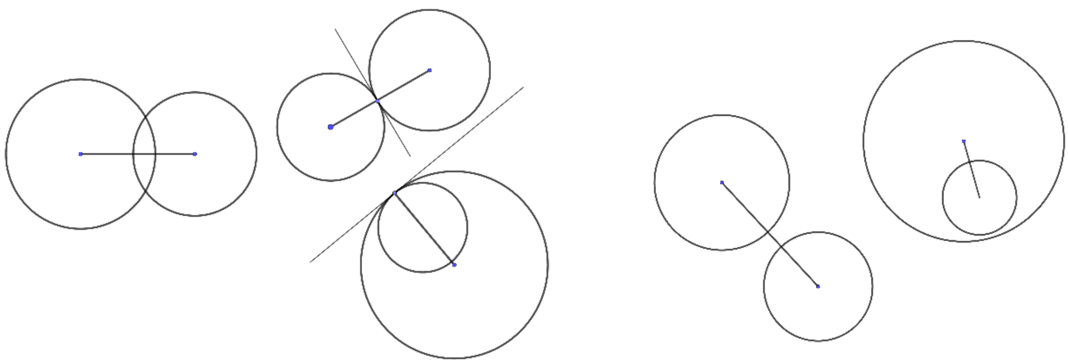
Repaso de circunferencias.
La circunferencia de centro O=*(a,b)* y radio *r*, es el conjunto de puntos *P=(x,y)* que verifican la ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Dada la circunferencia de centro O y radio r, y dado un punto cualquiera P, sea una recta cualquiera que pasa por P y corta a la circunferencia en dos puntos A y B. Se llama potencia de P respecto de la circunferencia al producto escalar *PA·PB*. En el caso del punto P exterior, la potencia es el producto de los segmentos PA y PB, y en el caso del punto P interior a la circunferencia, la potencia es el producto negativo. Los puntos de la circunferencia tienen potencia nula. Es inmediato comprobar que la potencia no depende de la recta secante elegida. Si otra recta que pase por P corta a la circunferencia en los puntos A' y B', basta comprobar que los triángulos PAB' y PA'B son semejantes por coincidencia de los ángulos inscritos en B' y B respectivamente.



Tomando en particular la recta que pasa por el centro O, si $P=(x_0,y_0)$ es exterior, si d es la distancia de P al centro O, la potencia de P respecto de la circunferencia es: $d^2-r^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$. En el caso interior, es lo mismo, pero con signo cambiado.

Estudiar la posición relativa de 2 circunferencias en función de las distancias entre los centros y los respectivos radios.



Dadas dos circunferencias, C y C', de centros *(a,b)* y *(a',b')* y radios *r, r'*, respectivamente, el lugar geométrico de los puntos *P=(x,y)* que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias se llama *eje radical*. Obviamente, las circunferencias no pueden ser concéntricas. El eje radical es una recta, de ecuación la diferencia de las dos ecuaciones de las circunferencias:

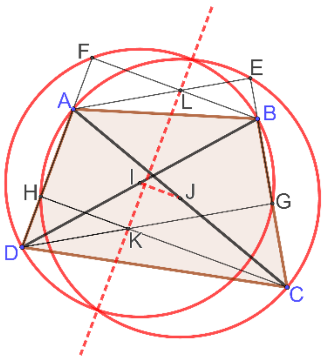
$(a' - a)x + (b' - b)y + c = 0$, que es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias.
En el caso de que las circunferencias sean secantes, los dos puntos de corte tienen potencia nula respecto de ambas, luego definen el eje radical. En el caso de circunferencias tangentes, el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias.

Problema 3 Fase Local 2024. *Sea ABCD un cuadrilátero. Sean J e I los puntos medios de las diagonales AC y BD, respectivamente. Sea G el punto de la recta BC tal que DG es perpendicular a BC y sea H el punto de la recta AD tal que CH es perpendicular a AD. Las rectas DG y CH se cortan en el punto K. Sea E el punto de la recta BC tal que AE es perpendicular a BC y sea F el punto de la recta AD tal que BF es perpendicular a AD. Las rectas AE y BF se cortan en el punto L. Probar que KL es perpendicular a JI.*

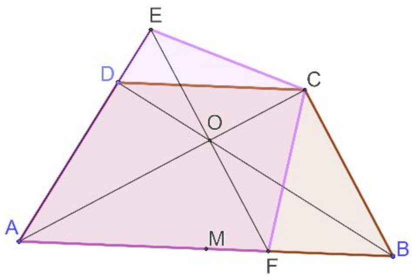
Solución. El cuadrilátero AECH es cíclico porque, los ángulos opuestos E y H son rectos; además, la circunferencia Γ_1 circunscrita a AECH es el punto medio de la diagonal AC, es decir J, ya que AEC es un triángulo rectángulo, luego su circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

Similarmente, BFDG es otro cuadrilátero cíclico, inscrito en una circunferencia Γ_2 de centro el punto I.

Se sabe que el eje radical de las dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 es perpendicular a la línea de centros IJ. El problema concluye si demostramos que KL es el eje radical de las dos circunferencias, para lo que comprobamos que la potencia de K (similarmente de L) es la misma respecto de ambas circunferencias. En efecto, los triángulos KHD y KGC son rectángulos semejantes, luego KH/KG = KD/KC, luego KH·KC=KG·KD.



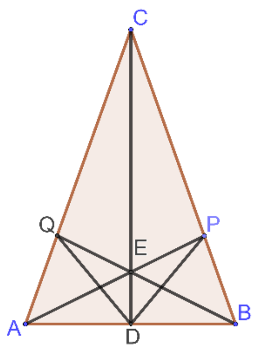
Problema 4 Fase Local 2024. *Sea ABCD un trapecio de bases AB y CD tal que AD = DC = CB = 5 y AB = 10. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero AECF.*

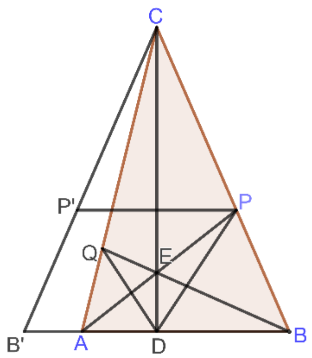


Solución.- Llamamos M al punto medio de AB, entonces ADCM es un rombo de lado 5, igual que BCDM. Dicho de otro modo, el trapecio dado es la unión de 3 triángulos equiláteros iguales: ADM, CDM y BCM de lados 5. La diagonal de trapecio dado es también la del rombo AMCD, y por tanto la bisectriz del ángulo BAD, y el triángulo ACB es recto en C, luego $AC = 5\sqrt{3}$. El punto O es el centro del triángulo equilátero CDM, por lo que $\mathrm{OM} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ y $OA = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. El triángulo rectángulo OAF, mitad de un equilátero, se tiene que AF=20/3. El área del cuadrilátero AECF es la suma del área del triángulo equilátero AEF de lado 20/3 y el triángulo ECF de base 20/3 y altura $5\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. El resto es trivial.

Problema 4 Fase Local 2024. *Sea ABC un triángulo acutángulo y D el punto de AB que es el pie de la altura desde C. Sea P un punto arbitrario en el lado BC. Las rectas AP y CD se cortan en el punto E, y las rectas BE y AC se cortan en el punto Q. Probar que CD es la bisectriz del ángulo PDQ.*

Solución 1. El caso en que el triángulo ABC es isósceles, con AC=BC, es muy simple. En ese caso, los triángulos PEB y QEA son iguales, luego QA=PB, y los triángulos AQD y BPD son iguales. El resto es trivial.





En el caso general, sea P’ el simétrico de P respecto de la recta CD, se trata de probar que P’, Q y D están alineados, porque entonces el ángulo PDQ es igual al PDP’. Así el problema sugiere utilizar el teorema de Menelao con el triángulo AB’C, donde B’ es el simétrico de B respecto de CD. Para ello tengo que probar que $\frac{AD}{DB\prime} \cdot \frac{B\prime P\prime}{P\prime C} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$, pero $DB' = -DB, B'P' = BP, P'C = PC$. Sustituyendo en la igualdad que tenemos que probar, queda $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Pero esto es cierto por el teorema de Ceva aplicado al triángulo ABC, ya que las rectas AP, BQ y CD son concurrentes en el punto E, por construcción.

Solución 2. Este problema puede abordarse con un planteamiento analítico. Se elige el punto D como origen de coordenadas, el lado AB como eje de abscisas y DC como el eje de ordenadas: Así los puntos dados son:

A=(a,0), B=(b,0), C=(0,c) y *D=(0,0)*, con *a,b* distintos, y distintos de 0, al ser el triángulo acutángulo. La recta BC tiene como ecuación *cx+by=bc*, por tanto el punto P tiene coordenadas $P = \left(\lambda, \frac{(b-\lambda)c}{b}\right)$.

La recta AP tiene la ecuación $a(b-\lambda)c + (\lambda - b)cx + b(\lambda - a)y = 0$, luego el punto E que es el corte de la recta anterior con DC, de ecuación *x=0*, por tanto $E = \left(0, \frac{ac(\lambda-b)}{b(\lambda-a)}\right)$. La ecuación de la recta BE es $abc(\lambda - b) - ac(\lambda - b)x - b^2(\lambda - a)y = 0$.

Queremos calcular la ecuación de DQ, pero D es el origen de coordenadas, por lo que para calcular esta ecuación no necesitamos calcular precisamente Q, sino cualquier otro punto Q’ de DQ cuyas coordenadas sean proporcionales a las de Q. El punto Q se obtienen como corte de la recta BE con AC, de ecuación $cx + ay = ac$, es decir sus coordenadas son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} abc(\lambda - b) - ac(\lambda - b)x - b^2(\lambda - a)y = 0 \\ cx + ay = ac \end{cases}$$

Así, $Q = \left(\frac{abc\lambda(b-a)}{\dots}, \frac{a(b-a)c^2(\lambda-b)}{\dots}\right)$ donde ambos denominadores son iguales, por tanto, podemos considerar un punto Q' de DQ de coordenadas proporcionales a las de Q, por ejemplo $Q' = (b\lambda, c(\lambda - b))$. De modo que la ecuación de DQ es $c(\lambda - b)x = b\lambda y$.

Para concluir esta solución basta comprobar que el simétrico de P, respecto de DC, que es $P' = \left(-\lambda, \frac{(b-\lambda)c}{b}\right)$ verifica la ecuación de la recta DQ.