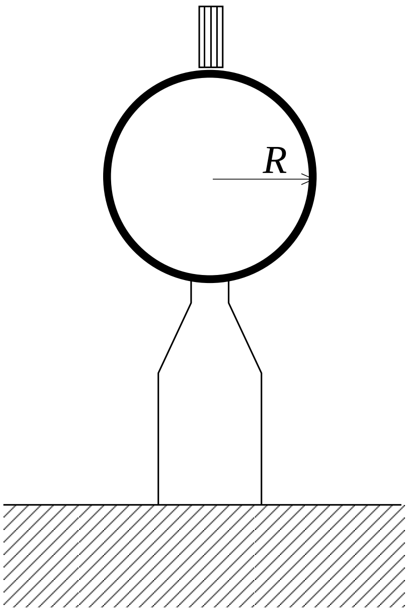
APELLIDOS ______________________________ **NOMBRE** ________

TITULACIÓN ____________________

I OLIMPIADA UNIVERSITARIA DE FÍSICA
Universidad de Sevilla, 5/5/2010

Problema 1. Un pequeño objeto descansa en lo alto de un anillo de radio R. Este anillo a su vez descansa sobre una botella, como muestra la figura. Calcular la mínima velocidad que hay que comunicar horizontalmente al anillo para que el pequeño objeto caiga verticalmente dentro de la botella.



Solución: Este problema se resuelve fácilmente si nos montamos en un sistema de referencia que se mueva con la misma velocidad v que se le comunica al anillo. Desde este punto de vista, el pequeño objeto parte con velocidad horizontal v en sentido contrario. Se busca que el disco no interfiera con el objeto, de forma que la única fuerza que actúe sobre el objeto sea la de la gravedad. En el instante inicial dicha fuerza es perpendicular a la velocidad. En consecuencia, la aplicación de la segunda ley de Newton nos lleva a que su aceleración es normal en este instante. Por ello, podemos aplicar la fórmula de la aceleración normal para calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria del objeto, resultando $\rho = v^2/g$, siendo g la aceleración de la gravedad. La condición de que el objeto no colisione con el disco es que este radio de curvatura sea mayor que el radio del disco, esto es, la solución es

$$v > \sqrt{gR}.$$

Alternativamente, lo podemos resolver sin montarnos en el anillo de la siguiente manera. La mínima velocidad del círculo debe ser tal que la pila descienda verticalmente casi rozando con la superficie del círculo. Siendo x la distancia recorrida por el círculo e y la distancia recorrida por la pila:

$$R^2 = x^2 + (R-y)^2, \text{ donde } y(t) = gt^2/2.$$

Entonces

$$x(t) = \frac{g}{2}\sqrt{4Rt^2/g - t^2}. \tag{1}$$

Además, se debe exigir la condición:

$$0 \le t \le \sqrt{2R/g}. \tag{2}$$

Derivando (1) con respecto del tiempo obtenemos:

$$v(t) = g(2R/g - t^2)/\sqrt{4R/g - t^2}. \tag{3}$$

Esta expresión también se puede escribir de la forma:

$$v(u) = g[u - 2R/(gu)], \tag{4}$$

siendo

$$u = \sqrt{4R/g - t^2}. \tag{5}$$

Siguiendo la condición (2) llegamos a $(4R/g)^{1/2} \geq u \geq (2R/g)^{1/2}$. Así, derivando $v(u)$

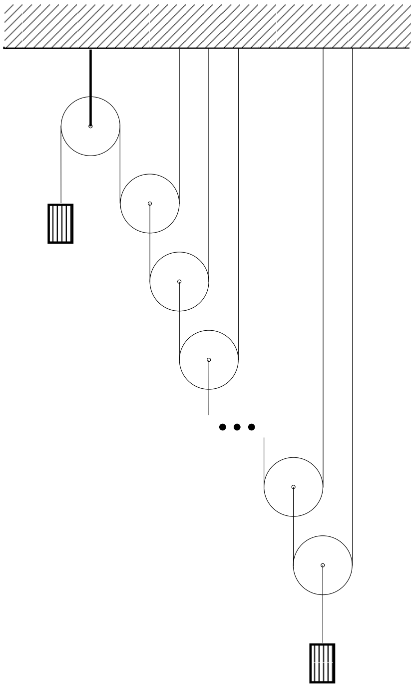
$$\frac{dv}{du} = g[1 + 2R/(gu^2)], \tag{6}$$

que para todo u cumple $dv/du \geq 0$. Así, cuando u disminuye, entonces v disminuye siempre. Siguiendo la ecuación (5), al aumentar t disminuye u, concluyendo entonces que al aumentar t, v disminuye. De esta forma, llegamos a la conclusión que $v(t)$ es una función decreciente en el dominio de t según (2). El máximo valor que tomará de v será sustituyendo $t = 0$ en (3):

$$v_{\max} = \sqrt{Rg}.$$

Esto quiere decir, que si inicialmente imprimimos al círculo una velocidad de $\sqrt{Rg}$, la pila caerá en dirección vertical.

Problema 2. Dos pesas de igual masa m están conectadas por un conjunto infinito de poleas e hilos de longitud constante. Si despreciamos el peso de las poleas y los hilos, calcúlese la aceleración con que cae la masa de la izquierda.



Solución: Denotemos por a_1 y a_2 las componentes verticales de las aceleraciones de los cuerpos de masa m a la izquierda y a la derecha, respectivamente. El hecho de que cada cuerda sea inextensible nos lleva a la conclusión que la segunda polea por la izquierda (la polea 2) se mueve a una velocidad (y aceleración) 2 veces menor que la del cuerpo 1, con sentidos contrarios. Por el mismo motivo, la siguiente polea se mueve 2 veces más lento que la anterior (aunque con el mismo sentido), y así sucesivamente. De esta manera, aplicando el mismo argumento iterativamente llegamos a que

$$a_2 = -a_1/2^N, \tag{7}$$

donde $N+1$ es el número total de poleas que hay en el sistema.

Por otro lado, la segunda ley de Newton nos dice

$$mg - T = ma_1, \tag{8}$$

donde T es la tensión de la primera cuerda. Como la tensión a lo largo de una cuerda es la misma en todos los puntos si despreciamos su masa, la polea 2 sufre una fuerza vertical hacía arriba de $2T$. Como la masa de la polea es despreciable, esta fuerza debe ser igual a la tensión $T_2 = 2T$ de la cuerda 2. Análogamente, la polea 3 sufre una fuerza vertical hacia arriba de $2T_2$, que se iguala con la tensión sobre la cuerda 3: $T_3 = 2T_2$. Así $T_3 = 2^2T$. Siguiendo este procedimiento llegamos a la conclusión que la tensión sobre la cuerda que sustenta el cuerpo 2 es 2^NT. Aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo 2 obtenemos

$$mg - 2^NT = ma_2. \tag{9}$$

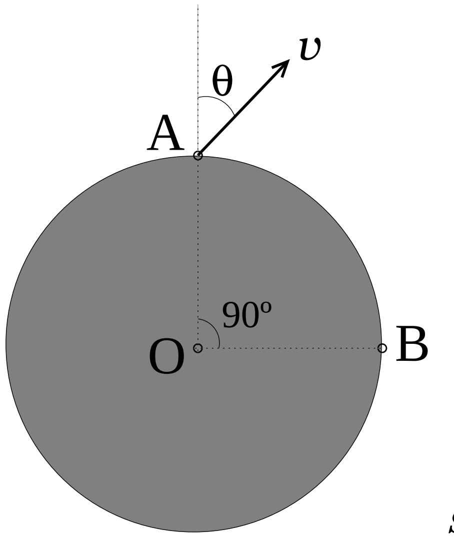
Resolviendo este sistema de ecuaciones para la tensión se obtiene

$$T = \frac{2^N+1}{2^{2N}+1}mg. \tag{10}$$

Por tanto, en el límite $N \to \infty$ tenemos $T \to 0$, y en consecuencia la solución es

$$a_1 = g.$$

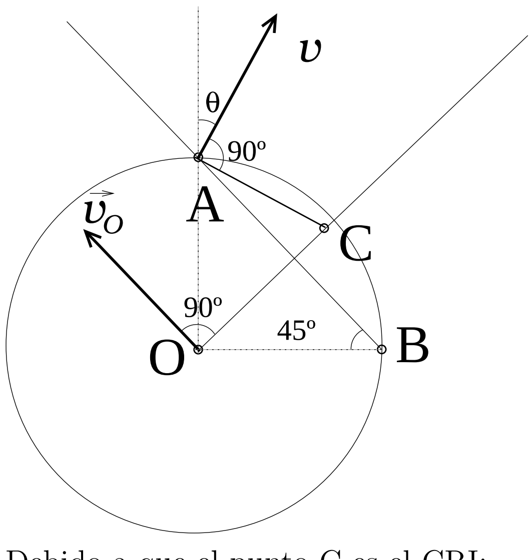
Problema 3. Un disco desliza horizontalmente sobre la superficie de una mesa, de forma que la velocidad del disco en el punto A tiene de módulo v y forma un ángulo θ con el radio del disco, como muestra la figura. Si el módulo de la velocidad en el punto B es igual que en el punto A, calcular la velocidad del centro O del disco.



Solución:

La solución trivial es que el disco no esté girando, entonces $\vec{v}_O = \vec{v}_A$, con $v_A = v$ y la dirección dada en el enunciado.

Para hallar la segunda solución consideremos que el disco gira. El centro de rotación instantánea (CRI), debe ser un punto C que descanse sobre una línea perpendicular al vector $\vec{v}_A$ y que pase por el punto A. Además, la velocidad angular de todo el disco respecto al CRI debe ser la misma para todos los puntos del disco. Para el punto A: $\omega = v/\overline{\mathrm{A}C}$. El punto B tiene el mismo módulo de velocidad que el punto A y también la misma velocidad angular con respecto al CRI, lo que indica que la distancia desde el punto B hasta el CRI debe cumplir $\overline{\mathrm{B}C} = \overline{\mathrm{A}C}$. Los únicos puntos que cumplen esta condición en el plano serán los que descansen sobre la bisectriz del ángulo $\mathrm{A}\widehat{O}B$.



Debido a que el punto C es el CRI:
$\mathrm{A}\vec{C} \perp \vec{v}_A$, $\mathrm{B}\vec{C} \perp \vec{v}_B$, $\mathrm{O}\vec{C} \perp \vec{v}_O$.

Por tanto $\mathrm{A}\widehat{O}C = \pi/4$. Esto nos permite conocer la dirección del vector $\vec{v}_O$, pues debe ser perpendicular al vector $\mathrm{O}\vec{C}$, como indica la figura. Además

$$\mathrm{C}\widehat{A}O = \pi - \theta - \pi/2 = \pi/2 - \theta. \tag{11}$$

Por otro lado

$$\frac{v_O}{\overline{\mathrm{O}C}} = \frac{v_A}{\overline{\mathrm{A}C}} = \omega. \tag{12}$$

A partir de la ley de los senos en el triángulo CAO:

$$\frac{\overline{\mathrm{O}C}}{\operatorname{sen}\mathrm{C}\widehat{A}O} = \frac{\overline{\mathrm{A}C}}{\operatorname{sen}\mathrm{A}\widehat{O}C}, \tag{13}$$

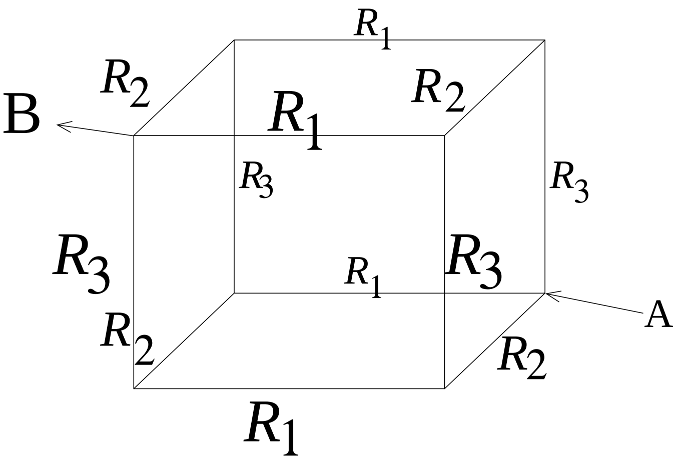
de donde

$$\frac{\overline{\mathrm{O}C}}{\overline{\mathrm{A}C}} = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)/(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\cos\theta. \tag{14}$$

Finalmente, sustituyendo (14) en (12) obtenemos

$$v_O = \sqrt{2}v\cos\theta, \quad \vec{v}_O \parallel \mathrm{B}\vec{A}.$$

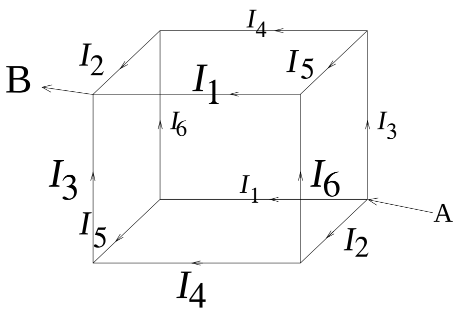
Problema 4. Doce resistencias están en las aristas del cubo mostrado en la figura. Todas las aristas paralelas tienen la misma resistencia, de forma que hay cuatro resistencias R_1, otras cuatro R_2, y otras cuatro R_3. Calcular la resistencia equivalente si se aplica una diferencia de potencial entre los puntos A y B, que descansan sobre una diagonal principal del cubo.



Solución: La intensidad I que llega al punto A se ramifica en las intensidades que van por las aristas de resistencias R_1, R_2 y R_3, es decir:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{15}$$

Por la simetría del problema, estas mismas corrientes se unen en el punto B, como muestra la figura adyacente. Podemos seguir explotando la simetría del cubo para considerar sólo 6 intensidades, tal como muestra la figura, en vez de las 12 que habría en ausencia de simetría. De esta manera, por simple inspección de la figura se obtienen las siguientes ecuaciones



$$\begin{aligned} I_3 &= I_4 + I_5, \\ I_2 &= I_4 + I_6, \\ I_1 &= I_5 + I_6. \end{aligned} \tag{16}$$

Estas nos permiten despejar I_4, I_5 y I_6 en función de I_1, I_2 y I_3:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3), \\ I_5 &= \frac{1}{2}(I_1 - I_2 + I_3), \\ I_6 &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - I_3). \end{aligned} \tag{17}$$

Por otro lado, la ley de Ohm a lo largo de varios caminos posibles nos lleva a (véase la figura):

$$\begin{aligned} V_{AB} &= I_1 R_1 + I_5 R_2 + I_3 R_3, \\ V_{AB} &= I_3 R_3 + I_4 R_1 + I_2 R_2, \\ V_{AB} &= I_1 R_1 + I_6 R_3 + I_2 R_2, \end{aligned} \tag{18}$$

donde V_{AB} es la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Podemos insertar las ecuaciones (17) en (18) para obtener un sistema de ecuaciones lineales para I_1, I_2 y I_3. Esta sistema se puede resolver mediante el cálculo de un determinante de 3×3, con lo que sólo quedaría aplicar la ecuación (15) para calcular la resistencia equivalente. No obstante, vamos a seguir aquí un procedimiento alternativo. Sumando y restando $I_1/2$, $I_2/2$, y $I_3/2$ a cada una de las ecuaciones en (17), respectivamente, llegamos a

$$I_4 = \frac{1}{2}I - I_1, \quad I_5 = \frac{1}{2}I - I_2, \quad I_6 = \frac{1}{2}I - I_3. \tag{19}$$

Insertando estas expresiones en (18) obtenemos

$$\begin{aligned} V_{AB} &= \frac{IR_1}{2} - I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3, \\ V_{AB} &= \frac{IR_2}{2} + I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3, \\ V_{AB} &= \frac{IR_3}{2} + I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3. \end{aligned} \tag{20}$$

La suma de estas tres ecuaciones resulta

$$3V_{AB} = \frac{I}{2}(R_1 + R_2 + R_3) + I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3. \tag{21}$$

Si a (21) le restamos cada una de la ecuaciones en (20) obtenemos

$$\begin{aligned} 2V_{AB} &= \frac{I}{2}(R_S - R_1) + 2I_1R_1, \\ 2V_{AB} &= \frac{I}{2}(R_S - R_2) + 2I_2R_2, \\ 2V_{AB} &= \frac{I}{2}(R_S - R_3) + 2I_3R_3, \end{aligned} \tag{22}$$

donde

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3.$$

Si ahora dividimos cada una de las ecuaciones en (22) por R_1, R_2 y R_3, respectivamente, y las sumamos se obtiene

$$2V_{AB}\frac{1}{R_P} = \frac{I(R_S + R_P)}{2R_P}, \tag{23}$$

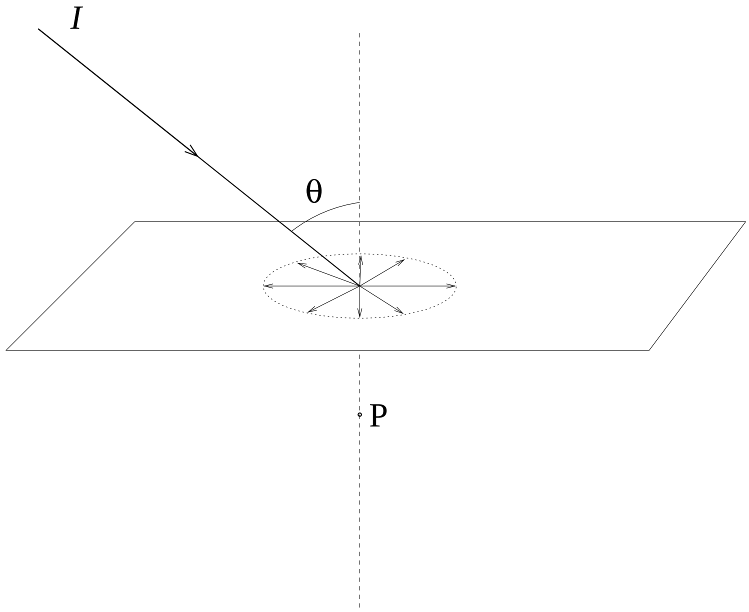
donde

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

De aquí se deduce que la solución es

$$R_{\text{eq}} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{R_S + R_P}{4}.$$

Problema 5. Una corriente I fluye a traves de un hilo conductor recto seminfinito que forma un ángulo θ con la normal a un plano conductor, como muestra la figura. Si la corriente se distribuye uniformemente en todas las direcciones dentro del plano, calcular el campo magnético en el punto P, que está a una distancia d por debajo del plano conductor.

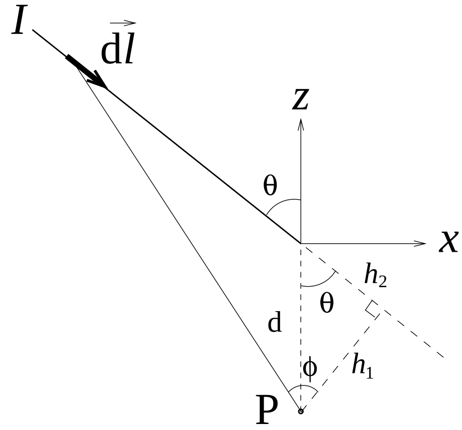


Solución: Recordemos la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \, \mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3}, \tag{24}$$

donde $\vec{l}$ es un vector que decribe la posición de la corriente de intensidad I que genera el campo magnético.

No es díficil convercerse que por simetría las corrientes en el plano no generan campo magnético sobre el eje perpendicular al plano que pasa por el punto P. Luego basta calcular el campo producido por el hilo semi-infinito. Escogiendo los ejes mostrados en la figura tenemos $\vec{r} = -d\vec{k}$ y $\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l}) = \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} = \mathrm{d}l\vec{j}(d \operatorname{sen}\theta)$, además de



$$|\vec{r} - \vec{l}| = \sqrt{h_1^2 + (l + h_2)^2}, \tag{25}$$

donde $h_1 = d \operatorname{sen}\theta$ y $h_2 = d\cos\theta$. Así

$$\vec{B}(\mathrm{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d \operatorname{sen}\theta \vec{j} \int_0^\infty \mathrm{d}l \frac{1}{(h_1^2 + (l + h_2)^2)^{3/2}}. \tag{26}$$

Esta integral puede hacerse fácilmente con el cambio de variables al ángulo ϕ mostrado en la figura, esto es

$$\tan\phi = \frac{l + h_2}{h_1}, \tag{27}$$

que nos lleva a

$$\vec{B}(\mathrm{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d \operatorname{sen}\theta \vec{j} \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \frac{\cos\phi}{h_1^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(1 - \cos\theta)}{d \operatorname{sen}\theta} \vec{j}.$$